Dérivées des fonctions sinus et cosinus.

x étant un réel quelconque, étudions les limites des rapports $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ et $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ lorsque h tend vers 0.

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin x}{h}$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin h}{h}\times\cos x+\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}$$

$$\frac{\cos h-1}{h} = \frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}$$

$$\frac{\cos h-1}{h} = \frac{\cos^2 h-1}{h\,(\cos h+1)}$$

$$\frac{\cos h-1}{h} = \frac{-\sin^2 h}{h\,(\cos h+1)}$$

$$\frac{\cos h-1}{h} = \frac{\sin h}{h}\times\frac{-\sin h}{\cos h+1}$$

or $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\cos h+1}=\frac{0}{2}=0$

donc $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0}$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}=0$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\cos x=\cos x$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\cos x+\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}=\cos x$

et $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x}$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos x}{h}$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\sin h}{h}\times(-\sin x)+\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}=0$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times(-\sin x)=-\sin x$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times(-\sin x)+\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}=-\sin x$

et $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x}$

Conclusion:

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\sin'(x)=\cos(x)$ et $\cos'(x)=-\sin(x)$.